Dr. M. Friesen WS 2016/2017

Wahrscheinlichkeitstheorie 1

Blatt 8

Aufgabe 1 *(4 Punkte)*
Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige, $\mathbb{R}$-wertige standard normalverteilte Zufallsvariablen und $Y := X_1^2 + \cdots + X_n^2$.

(a) Bestimmen Sie die charakteristische Funktion von Y.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{P} \circ Y^{-1}$ eine Dichte hat und bestimmen Sie diese Dichte.

Aufgabe 2 *(4 Punkte)*
Seien X_n, Y_n zwei Folgen von $\mathbb{R}$-wertigen Zufallsvariablen mit $X_n \longrightarrow X$ sowie $Y_n \longrightarrow Y$ in Verteilung für $n \to \infty$. Angenommen, X_n, Y_n sind unabhängig für jedes $n \in \mathbb{N}$ und X, Y sind ebenfalls unabhängig. Zeigen Sie, dass $X_n + Y_n \longrightarrow X + Y$ in Verteilung für $n \to \infty$.

Aufgabe 3 *(4 Punkte)*
Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von $\mathbb{R}$-wertigen Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ eine Teil-σ-Algebra. Es sei X_n unabhängig von $\mathcal{G}$ für jedes $n \geq 1$ und es gelte $X_n \longrightarrow X$ fast sicher. Zeigen Sie, dass X unabhängig von $\mathcal{G}$ ist.

Aufgabe 4 *(4 Punkte)*
Sei X eine standard normalverteilte Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{R}$. Seien $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ und sei

$$Y := \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n.$$

Zeigen Sie, dass die charakteristische Funktion von Y beliebig oft differenzierbar ist.